Том 28, № 144 2023

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ
© Сумин М.И., 2023
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-414-435
УДК 517.9

# О роли множителей Лагранжа и двойственности в некорректных задачах на условный экстремум. К 60-летию метода регуляризации Тихонова

**Михаил Иосифович СУМИН**

ФГБОУ ВО «Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина»

392000, Российская Федерация, г. Тамбов, ул. Интернациональная, 33

**Аннотация.** Обсуждается важная роль множителей Лагранжа и двойственности в теории некорректных задач на условный экстремум. Центральное внимание уделяется задаче устойчивого приближенного нахождения нормального (минимального по норме) решения операторного уравнения первого рода $Az = u$, $z \in \mathcal{D} \subseteq Z$, где $A : Z \to U$ — линейный ограниченный оператор, $u \in U$ — заданный элемент, $\mathcal{D} \subseteq Z$ — выпуклое замкнутое множество, $Z, U$ — гильбертовы пространства, являющейся классической для теории некорректных задач. Рассматриваются две эквивалентные ей задачи (с точки зрения одновременного существования их единственных решений) на условный экстремум, первая из которых — это задача ( $CE1$ ) с функциональным ограничением-неравенством $\|z\|^2 \to \min$, $\|Az-u\|^2 \leq 0$, $z \in \mathcal{D}$, а вторая — задача ( $CE2$ ) с операторным ограничением-равенством $\|z\|^2 \to \min$, $Az = u$, $z \in \mathcal{D}$. В работе последовательно: 1) показывается, что метод регуляризации Тихонова может естественным образом трактоваться как метод устойчивой аппроксимации точного решения экстремалями функционала Лагранжа для задачи ( $CE1$ ) с одновременным построением в двойственной к ней задаче максимизирующей последовательности из множителей Лагранжа, при этом множитель Лагранжа является величиной обратной параметру регуляризации в методе Тихонова; другими словами, теореме сходимости метода регуляризации Тихонова придается вид утверждения в форме двойственности относительно задачи ( $CE1$ ); 2) обсуждается роль стабилизации по Тихонову для выпуклых задач общего вида при решении задач на условный экстремум; 3) обсуждается основанный на стабилизации по Тихонову двойственной к ( $CE2$ ) задачи устойчивый метод для решения исходного операторного уравнения, который может рассматриваться как метод регуляризации правила множителей Лагранжа для задачи ( $CE2$ ); 4) обсуждаются особенности каждого из двух указанных выше подходов к регуляризации решения исходного операторного уравнения.

**Ключевые слова:** некорректная задача, линейное операторное уравнение, регуляризирующий алгоритм, метод регуляризации Тихонова, условный экстремум, правило множителей Лагранжа, двойственность, обобщенная минимизирующая последовательность, двойственная регуляризация, регуляризованный принцип Лагранжа

**Благодарности:** Результаты, представленные в вводной части и разделах 1, 3, получены за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-11-20020, https://rscf.ru/project/23-11-20020/); результаты, представленные в разделе 2, получены за счет гранта Министерства образования и науки Тамбовской области № 2-ФП-2023.

**Для цитирования:** *Сумин М.И.* О роли множителей Лагранжа и двойственности в некорректных задачах на условный экстремум. К 60-летию метода регуляризации Тихонова // Вестник российских университетов. Математика. 2023. Т. 28. № 144. С. 414–435. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-414-435

SCIENTIFIC ARTICLE
© M. I. Sumin, 2023
https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-414-435

# On the role of Lagrange multipliers and duality in ill-posed problems for constrained extremum. To the 60th anniversary of the Tikhonov regularization method

**Mikhail I. SUMIN**
Derzhavin Tambov State University
33 Internatsionalnaya St., Tambov 392000, Russian Federation

**Abstract.** The important role of Lagrange multipliers and duality in the theory of ill-posed problems for a constrained extremum is discussed. The central attention is paid to the problem of stable approximate finding of a normal (minimum in norm) solution of the operator equation of the first kind $Az = u$, $z \in \mathcal{D} \subseteq Z$, where $A : Z \to U$ is a linear bounded operator, $u \in U$ is a given element, $\mathcal{D} \subseteq Z$ is a convex closed set, $Z, U$ are Hilbert spaces. As is known, this problem is classical for the theory of ill-posed problems. We consider two problems equivalent to it (from the point of view of the simultaneous existence of their unique solutions) for a constrained extremum, the first of which is the problem ( $CE1$ ) with a functional inequality constraint $\|z\|^2 \to \min$, $\|Az - u\|^2 \le 0$, $z \in \mathcal{D}$, and the second is the problem ( $CE2$ ) with operator equality constraint $\|z\|^2 \to \min$, $Az = u$, $z \in \mathcal{D}$. First of all, we show that Tikhonov's regularization method can be naturally interpreted as a method of stable approximation of the exact solution by extremals of the Lagrange functional for problem ( $CE1$ ) with simultaneous construction of a maximizing sequence of Lagrange multipliers in its dual problem. In this case, the Lagrange multiplier is the reciprocal of the regularization parameter in the Tikhonov method. In other words, the convergence theorem of the Tikhonov regularization method is given the form of a statement in the form of duality with respect to the problem ( $CE1$ ). Next, we discuss the role of Tikhonov stabilization for general convex problems in solving problems for constrained extremum and a stable method based on Tikhonov stabilization of the problem dual to ( $CE2$ ) for solving the original operator equation, which can be considered as a regularization method for the Lagrange multiplier rule for the problem ( $CE2$ ). The paper discusses the features of each of the two above mentioned approaches to the regularization of solving the original operator equation.

**Keywords:** ill-posed problem, linear operator equation, regularizing algorithm, Tikhonov regularization method, constrained extremum, Lagrange multiplier rule, duality, generalized minimizing sequence, dual regularization, regularized Lagrange principle

**Acknowledgements:** The results of Introduction and Sections 1, 3 were obtained within the Russian Science Foundation (project no. 23-11-20020, https://rscf.ru/en/project/23-11-20020/). The results of Section 2 were obtained within the grant of the Ministry of Education and Science of the Tambov region no. 2-ФП-2023.

**Mathematics Subject Classification:** 47A52 49K27 90C46 90C31.

**For citation:** Sumin M.I. On the role of Lagrange multipliers and duality in ill-posed problems for constrained extremum. To the 60th anniversary of the Tikhonov regularization method. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **28**:144 (2023), 414–435. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2023-28-144-414-435
(In Russian, Abstr. in Engl.)

## Введение

Как известно, некорректные задачи составляют в совокупности огромный класс математических задач, порожденный, в первую очередь, запросами современных естественнонаучных приложений [1–4]. Среди существующих к настоящему времени подходов к решению некорректных задач [3, 5–9] наибольшую известность получил подход, за которым закрепилось название метода регуляризации Тихонова [1–4, 6, 7]. Предложенный А. Н. Тихоновым [1, 2] в 1963 г. метод регуляризации (стабилизации) вот уже на протяжении шестидесяти лет является основным методом для решения самых разнообразных актуальных некорректных задач [3, 4]. Он применяется как для решения операторных уравнений (см., например, [1–7]), так и для решения задач математического программирования (см., например, [8]). Различным вариантам метода регуляризации Тихонова применительно к указанным классам некорректных задач за прошедшие шесть десятков лет посвящено большое количество публикаций, в том числе, и монографического (см., например, [5, 6]), а также учебного характера (см., например, [3, 7–9]).

Данная статья продолжает линию работ [10, 11], посвященных ответу на вопрос о том, как, опираясь на классическое правило множителей Лагранжа (ПМЛ) и связанные с ним методы, можно решать некорректные задачи. Говоря точнее, она продолжает непосредственно исследования работы [11], посвященной обсуждению того, как регуляризация этого классического правила позволяет естественным образом трансформировать его в устойчивые к ошибкам исходных данных алгоритмы решения задач поиска нормальных решений операторных уравнений первого рода на паре гильбертовых пространств. Такие задачи, как известно [1–9], являются классическими некорректными задачами. В отличие от работы [11], основная направленность данной работы состоит в том, чтобы подчеркнуть роль множителей Лагранжа и теории двойственности в регуляризации некорректных задач и, прежде всего, в регуляризации по Тихонову [1–3, 6, 7] операторных уравнений на паре гильбертовых пространств. Несмотря на то, что различные результаты, связанные с теорией множителей Лагранжа, являются базовыми для теории некорректных задач с самого появления метода регуляризации Тихонова в 1963 г., автору данной статьи не попадались какие-либо публикации, в которых этот метод последовательно трактовался бы с позиции теории множителей Лагранжа и двойственности.

**0.1. Метод регуляризации Тихонова для решения линейного операторного уравнения на паре гильбертовых пространств.** Напомним кратко, в чем состоит метод регуляризации Тихонова [1–3, 6, 7] применительно к решению операторных уравнений первого рода, ограничившись достаточно содержательным случаем таких уравнений на паре гильбертовых пространств. Этот метод предназначен для устойчивого приближенного нахождения нормального (минимального по норме) решения операторного уравнения первого рода

$$(IP) \qquad Az = u, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z,$$

где $A : Z \to U$ — линейный ограниченный оператор, $u \in U$ — заданный элемент, $\mathcal{D} \subseteq Z$ — выпуклое замкнутое множество, $Z, U$ — гильбертовы пространства. При этом в самых первых работах [1] некорректная задача $(IP)$ рассматривалась для случая $\mathcal{D} = Z$ при условии, что оператор $A$ является интегральным оператором Фредгольма, а в качестве $Z$, $U$ используются пространства суммируемых с квадратом функций.

Фундаментальным в теории некорректных задач является понятие регуляризирующего алгоритма (оператора) по Тихонову [1–3, 6, 7]. С целью его формулировки введем «приближенную» задачу $(IP)$

$$(IP^{h,\delta}) \equiv (IP^{\eta}) \qquad A^h z = u^\delta, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z, \quad \eta \equiv (h, \delta),$$

с заданными линейным ограниченным оператором $A^h : Z \to U$ и элементом $u^\delta \in U$ такими, что $\|A^h - A^0\| \le h$, $\|u^\delta - u^0\| \le \delta$, $A \equiv A^0$, $u \equiv u^0$. Здесь $h \in (0, h_0]$, $\delta \in (0, \delta_0]$, $h_0 > 0$, $\delta_0 > 0$ — числовые параметры, характеризующие степень отклонения исходных данных приближенной задачи $(IP^{h,\delta})$ от исходных данных точной задачи $(IP) = (IP^{0,0}) \equiv (IP^0)$. Предположим, наконец, что задача $(IP) = (IP^0)$ имеет точное нормальное решение $z^0 \in \mathcal{D}$.

Определение 0.1. Регуляризирующим для задачи $(IP^0)$ называется зависящий от $h$ и $\delta$ и действующий во множество $\mathcal{D}$ алгоритм (оператор) $R(A^h, u^\delta, \eta)$, $\eta \equiv (h, \delta)$, ставящий в соответствие любой паре исходных данных $\{A^h, u^\delta\}$, удовлетворяющей оценкам $\|A^h - A^0\| \le h$, $\|u^\delta - u^0\| \le \delta$, элемент $z^{h,\delta} \equiv z^\eta$ такой, что $\|z^\eta - z^0\| \to 0$, $\eta \to 0$.

Метод регуляризации (стабилизации) Тихонова для решения операторного уравнения первого рода $(IP)$ указывает конкретный способ построения регуляризирующего алгоритма, обеспечивающий устойчивое приближенное решение этой некорректной задачи. Он неразрывно связан с задачей минимизации так называемого сглаживающего функционала — функционала Тихонова

$$M^{\eta,\alpha}(z) \equiv \|A^h z - u^\delta\|^2 + \alpha \|z\|^2 \to \min, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{0.1}$$

единственное решение $z^{\eta,\alpha}$ которой при $\alpha > 0$ всегда существует, при этом величина $\alpha \ge 0$ называется параметром регуляризации. С помощью экстремалей функционала Тихонова, которые, очевидно, являются одновременно решениями вариационного неравенства

$$\langle A^{h*} A^h z + \alpha z - A^{h*} u^\delta, y - z \rangle \ge 0 \quad \forall\, y \in \mathcal{D},$$

происходит аппроксимация точного нормального решения $z^0$ задачи $(IP^0)$ при условии, что величины $h$ и $\delta$ стремятся к нулю согласованно со стремлением к нулю параметра регуляризации $\alpha > 0$. Сформулируем теорему сходимости метода регуляризации Тихонова [6, гл. 1, § 2].

**Теорема 0.1.** [***Сходимость метода регуляризации Тихонова***] *Пусть задача* $(IP^0)$ *разрешима и* $z^0 \in \mathcal{D}$ *— ее нормальное решение. Тогда, если выполняется условие согласования*

$$(h^2 + \delta^2)/\alpha(\eta) \to 0, \quad \alpha(\eta) \to 0, \quad \eta \equiv (h, \delta) \to 0, \tag{0.2}$$

*то имеет место и предельное соотношение* $\|z^{\eta,\alpha(\eta)} - z^0\| \to 0$, $\eta \to 0$, *т. е. оператор* $R(A^h, u^\delta, \eta)$, *ставящий в соответствие любой паре исходных данных* $\{A^h, u^\delta\}$, *удовлетворяющей оценкам* $\|A^h - A^0\| \le h$, $\|u^\delta - u^0\| \le \delta$, *элемент* $z^{\eta,\alpha(\eta)}$, *является регуляризирующим.*

**0.2. Эквивалентные операторному уравнению $(IP)$ задачи на условный экстремум.** С формальной точки зрения нормальное решение задачи $(IP)$ можно искать посредством решения двух задач на условный экстремум. Одна из них это задача невыпуклой минимизации с одним функциональным ограничением-равенством $\|z\|^2 \to \min$,

$\|Az-u\|^2=0$, $z\in\mathcal{D}$ или эквивалентная ей задача квадратичной выпуклой оптимизации с одним функциональным ограничением-неравенством

$$(CE1)\qquad \|z\|^2\to\min,\quad \|Az-u\|^2\le 0,\quad z\in\mathcal{D},$$

другая — задача минимизации с операторным (т. е. задаваемым оператором с бесконечномерным образом в случае бесконечномерности $U$) ограничением-равенством

$$(CE2)\qquad \|z\|^2\to\min,\quad Az=u,\quad z\in\mathcal{D}.$$

Все эти три задачи условной оптимизации эквивалентны с той точки зрения, что их решения (единственные) одновременно либо не существуют, либо существуют и совпадают между собой. Возможности решения задачи $(IP)$ на основе регуляризации ПМЛ для задачи $(CE2)$ подробно обсуждались в [11].

Задача $(CE1)$, будучи эквивалентной в указанном выше смысле задаче $(CE2)$, тем не менее, по своим оптимизационным свойствам принципиально от нее отличается. Ниже в статье мы показываем, что связанный с теорией двойственности и ПМЛ аппарат, последовательно примененный к задаче $(CE1)$, позволяет взглянуть на классический метод регуляризации с несколько иной, по сравнению с традиционной [1,3,6,7], стороны. Говоря более точным языком, сам описанный выше метод Тихонова и такой его классический вариант как обобщенный принцип невязки представляют собой ничто иное, как разные версии решения двойственной задачи по отношению к «простейшей» задаче квадратичной оптимизации $(CE1)$. При этом, подобно [11], аппроксимация точного решения задачи $(IP)$ происходит посредством экстремалей регулярного функционала Лагранжа для задачи $(CE1)$, но в отличие от [11] без регуляризации самой двойственной к $(CE1)$ задачи. Подчеркнем при этом, что в [11] двойственная задача бралась по отношению к задаче $(CE2)$. Другими словами, в следующем разделе теореме сходимости метода регуляризации Тихонова придается вид утверждения в форме двойственности относительно задачи $(CE1)$ (подробности ниже в теореме 1.1).

В работе последовательно обсуждаются: 1) особенности метода регуляризации Тихонова как двойственного метода относительно задачи $(CE1)$; 2) особенности метода стабилизации Тихонова для выпуклых задач общего вида (без ограничений типа равенства и неравенства) при решении задач на условный экстремум; 3) особенности регуляризации ПМЛ для задачи $(CE2)$; 4) сравнение результатов, основанных на двойственности подходов к регуляризации задач $(CE1)$ и $(CE2)$; 5) возможности и результаты применения методов возмущений и негладкого анализа при регуляризации задачи $(IP)$ на основе двойственного подхода к регуляризации задачи $(CE2)$.

## 1. Метод регуляризации Тихонова в форме двойственности для решения операторного уравнения на паре гильбертовых пространств

**1.1. Метод регуляризации Тихонова в форме двойственности.** В контексте данной статьи представляется важным заметить сразу, что функционал Тихонова $M^{\eta,\alpha}(z)$, $z\in\mathcal{D}$ (см. (0.1)), по сути дела, совпадает с регулярным функционалом Лагранжа

$$L^\eta(z,1/\alpha)\equiv\|z\|^2+\frac{1}{\alpha}\|A^hz-u^\delta\|^2,\quad z\in\mathcal{D}$$

в задаче

$$\|z\|^2\to\min,\quad \|A^hz-u^\delta\|^2\le 0,\quad z\in\mathcal{D}, \tag{1.1}$$

отличаясь от последнего лишь положительным множителем, при этом экстремали этих двух функционалов совпадают. Множитель $1/\alpha$ играет роль одномерной двойственной переменной в этой задаче, а посредством экстремалей $z^\eta[1/\alpha] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L^\eta(z,1/\alpha)$, $z^\eta[1/\alpha] = z^{\eta,\alpha}$, функционала Лагранжа $L^\eta(z,1/\alpha)$, $z\in\mathcal{D}$ при условии согласованного стремления к нулю $\eta$ и $\alpha$ происходит аппроксимация точного решения задачи ($IP^0$).

Приведем доказательство сходимости метода регуляризации Тихонова, опираясь на теорию двойственности и ПМЛ. С этой целью, прежде всего, введем двойственную к (1.1) задачу

$$V^\eta(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}}\{\|z\|^2 + \lambda\|A^h z - u^\delta\|^2\} \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L^\eta(z,\lambda) \to \sup, \quad \lambda \geq 0, \tag{1.2}$$

$$z^\eta[\lambda] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L^\eta(z,\lambda) \quad h\in[0,h_0], \quad \delta\in[0,\delta_0].$$

При доказательстве соответствующего результата нам потребуется лемма, в которой устанавливается формула для супердифференциала маргинальной вогнутой функции $V^\eta$ (напомним, что под супердифференциалом вогнутого функционала $V$ понимается субдифференциал с обратным знаком выпуклого функционала $-V$). Для ее формулировки рассмотрим маргинальную функцию

$$V(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L(z,\lambda), \quad \lambda\geq 0, \quad z[\lambda] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L(z,\lambda)$$

для функционала Лагранжа $L(z,\lambda) \equiv \|z\|^2 + \lambda\|Az-u\|^2$, $z\in\mathcal{D}$, $\lambda\geq 0$, задачи на условный экстремум ($CE1$). Применяя использованный при доказательстве леммы 2 в [12] метод, с учетом сильной выпуклости по $z$ функционала Лагранжа $L(z,\lambda)$, $z\in\mathcal{D}$, приходим к утверждению о том, что имеет место

**Лемма 1.1.** *Супердифференциал (в смысле выпуклого анализа) вогнутого функционала $V(\lambda)$, $\lambda\geq 0$ при $\lambda>0$ представляет собой одноточечное множество, задается равенством $\partial V(\lambda) = \|Az[\lambda]-u\|^2$ и является производной Фреше этого функционала.*

Переходим к формулировке и доказательству теоремы сходимости метода регуляризации Тихонова в терминах функции Лагранжа $L^\eta$ и целевой функции $V^0$ двойственной задачи (1.2) при $h=\delta=0$, которая позволяет трактовать его как двойственный метод решения задачи ($CE1$), эквивалентной исходной некорректной задаче ($IP$). В соответствии с формулируемой теоремой величина $1/\alpha(\eta)$, обратная вырабатываемому теоремой 0.1 параметру регуляризации $\alpha(\eta)$ и одновременно являющаяся двойственной переменной в точной задаче (1.1) при $h=\delta=0$, доставляет «максимум в пределе при $\eta\to 0$» в точной двойственной задаче $V^0(\lambda)\to\sup$, $\lambda\geq 0$, а соответствующие экстремали $z^\eta[1/\alpha(\eta)]$ функции Лагранжа $L^\eta(z,1/\alpha(\eta))$, $z\in\mathcal{D}$ аппроксимируют при $\eta\to 0$ точное решение $z^0$ в точной задаче (1.1) при $h=\delta=0$. В силу леммы 1.1 целевая функция $V^\eta$ в двойственной задаче $V^\eta(\lambda)\to\sup$, $\lambda\geq 0$ является при $\lambda>0$ одномерной непрерывной дифференцируемой монотонно неубывающей вогнутой функцией с неотрицательным градиентом $\|A^h z^\eta[\lambda]-u^\delta\|^2$.

**Теорема 1.1.** [***Сходимость метода регуляризации Тихонова как основанного на двойственности метода***] *Справедливы следующие два утверждения:*

***1.*** *Пусть задача ($IP^0$) разрешима и $z^0\in\mathcal{D}$ — ее нормальное решение. Пусть также выполняется условие согласования (0.2). Тогда можно утверждать, что элементы*

*$z^\eta[1/\alpha(\eta)]$ равномерно по $\eta \geq 0$ ограничены и справедливы предельные соотношения*

$$\|z^\eta[1/\alpha(\eta)]\|^2 \leq \|z^0\|^2 + \epsilon(\eta), \quad \epsilon(\eta) \geq 0, \quad \epsilon(\eta) \to 0, \tag{1.3}$$

$$(V^\eta)'(1/\alpha(\eta)) = \|A^h z^\eta[1/\alpha(\eta)] - u^\delta\|^2 \to 0, \quad \eta \to 0,$$

*которые, в свою очередь, влекут предельное соотношение*

$$z^{\eta,\alpha(\eta)} = z^\eta[1/\alpha(\eta)] \to z^0, \quad \eta \to 0, \tag{1.4}$$

*в частности, и при $h = \delta = 0$, $\alpha(\eta) = \alpha$*

$$\lim_{\alpha \to 0} z^0[1/\alpha] = z^0, \tag{1.5}$$

*т. е. оператор $R(A^h, u^\delta, \eta)$, ставящий в соответствие любой паре исходных данных $\{A^h, u^\delta\}$, удовлетворяющей оценкам $\|A^h - A^0\| \leq h$, $\|u^\delta - u^0\| \leq \delta$, элемент $z^{\eta,\alpha(\eta)} = z^\eta[1/\alpha(\eta)]$, $\alpha(\eta) > 0$, является регуляризирующим.*

*Одновременно выполняется и предельное соотношение*

$$V^0(1/\alpha(\eta)) \to \|z^0\|^2 = \sup_{\gamma > 0} V^0(\gamma), \quad \eta \to 0, \tag{1.6}$$

*которое означает, что любая последовательность $1/\alpha(\eta_k)$, $k = 1, 2, \ldots$, $\eta_k \to 0$, $k \to \infty$, является максимизирующей в задаче*

$$V^0(\lambda) \equiv \min_{z \in \mathcal{D}} \{\|z\|^2 + \lambda \|A^0 z - u^0\|^2\} \equiv \min_{z \in \mathcal{D}} L^0(z, \lambda) \to \sup, \quad \lambda \geq 0, \tag{1.7}$$

*т. е. в задаче, двойственной к исходной точной задаче*

$$\|z\|^2 \to \min, \quad \|A^0 z - u^0\|^2 \leq 0, \quad z \in \mathcal{D}. \tag{1.8}$$

***2.** С другой стороны, если имеет место предельное соотношение $(\lambda \geq 0)$*

$$(V^\eta)'(\lambda) = \|A^h z^\eta[\lambda] - u^\delta\|^2 \to 0, \quad \eta \to 0, \quad \lambda \to \infty, \tag{1.9}$$

*а минимали $z^\eta[\lambda]$ равномерно по $\lambda > 0$ и $\eta \equiv (h, \delta) > 0$ ограничены, то при условии согласования $\lambda(h^2 + \delta^2) \to 0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$ справедливо и предельное соотношение $z^\eta[\lambda] \to z^0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$, где $z^0$ — нормальное решение задачи $(IP^0)$.*

З а м е ч а н и е 1.1. Первое утверждение теоремы, как следствие существования нормального решения $z^0$, можно трактовать как выраженное посредством предельных соотношений необходимое условие обычной оптимальности в форме двойственности относительно задачи (1.8), второе же можно рассматривать как выраженное также посредством предельных соотношений достаточное условие обычной оптимальности в той же задаче. Первая часть первого утверждения теоремы, по сути дела, совпадает с утверждением теоремы 0.1, но выражается в терминах функции Лагранжа и содержит дополнительно предельные соотношения (1.3). Отмеченные обстоятельства позволяют характеризовать теорему с дополнительными утверждениями, как теорему сходимости метода регуляризации Тихонова в форме двойственности.

Доказательство. Используем функционал Лагранжа $L^\eta(z, 1/\alpha)$, $z \in \mathcal{D}$ вместо функционала Тихонова, $\eta \equiv (h,\delta)$, $h \in [0, h_0]$, $\delta \in [0, \delta_0]$. Доказываем первую часть первого утверждения теоремы. Можем записать

$$L^\eta(z^\eta[1/\alpha], 1/\alpha) \le L^\eta(z^0, 1/\alpha) \le \frac{1}{\alpha}(h\|z^0\| + \delta)^2 + \|z^0\|^2. \tag{1.10}$$

В силу условия согласования (0.2) существует постоянная $C > 0$, не зависящая от $\eta$, такая, что $(h\|z^0\| + \delta)^2/\alpha(\eta) \le C$. Тогда, пользуясь оценкой (1.10), можем записать

$$\|z^\eta[1/\alpha(\eta)]\|^2 + \frac{1}{\alpha(\eta)}\|A^h z^\eta[1/\alpha(\eta)] - u^\delta\|^2 \le (h\|z^0\| + \delta)^2/\alpha(\eta) + \|z^0\|^2 \le C + \|z^0\|^2,$$

откуда с учетом условия согласования (0.2) следуют равномерная по $\eta \equiv (h,\delta) > 0$ ограниченность норм $\|z^\eta[1/\alpha(\eta)]\|$, первое предельное соотношение (1.3) и, кроме того, с учетом еще и леммы 1.1, второе предельное соотношение (1.3). Эти два последних факта в совокупности со стандартными рассуждениями (см., например, [6, гл. 1, § 2], [9, теорема 2.3.1]), основанными на слабой компактности ограниченного выпуклого замкнутого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве, приводят к предельному соотношению (1.4). Полагая формально $\eta = 0$ в (1.10), получаем после подобных рассуждений и аналогичное (1.4) предельное соотношение (1.5).

Доказываем вторую часть первого утверждения теоремы, т. е. предельное соотношение (1.6). Пользуясь оценкой (1.10) при $h = \delta = 0$, можем записать

$$V^0(1/\alpha) = \|z^0[1/\alpha]\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|A^0 z^0[1/\alpha] - u^0\|^2 \le \|z^0\|^2,$$

откуда с учетом уже доказанного выше предельного соотношения (1.5) вытекает предельное соотношение

$$\frac{1}{\alpha}\|A^0 z^0[1/\alpha] - u^0\|^2 \to 0, \quad \alpha \to 0. \tag{1.11}$$

Таким образом, с учетом предельных соотношений (1.5) и (1.11), получаем

$$V^0(1/\alpha) = \|z^0[1/\alpha]\|^2 + \frac{1}{\alpha}\|A^0 z^0[1/\alpha] - u^0\|^2 \to \|z^0\|^2, \quad \alpha \to 0.$$

Отсюда, так как $V^0(1/\alpha) \le \sup\limits_{\gamma>0} V^0(\gamma) \le \|z^0\|^2$, следует предельное соотношение

$$V^0(1/\alpha) \to \|z^0\|^2 = \sup_{\gamma>0} V^0(\gamma), \quad \alpha \to 0,$$

которое может быть переписано и в виде (1.6).

Для доказательства второго утверждения заметим, прежде всего, что задача ( $IP^0$ ) (или (1.8)) разрешима ввиду предельного соотношения (1.9), равномерной по $\lambda > 0$, $\eta \equiv (h,\delta) > 0$ ограниченности семейства $z^\eta[\lambda]$ и условий на исходные данные задачи ( $IP^0$ ). Далее, так как элемент $z^\eta[\lambda]$ минимизирует функционал $L^\eta(\cdot, \lambda)$, можем записать

$$\|z^\eta[\lambda]\|^2 + \lambda\|A^h z^\eta[\lambda] - u^\delta\|^2 \le \|z\|^2 + \lambda\|A^h z - u^\delta\|^2 \quad \forall\, z \in \mathcal{D},$$

откуда следует, что

$$\|z^\eta[\lambda]\|^2 \le \|z\|^2 + \lambda\|A^h z - u^\delta\|^2 \quad \forall\, z \in \mathcal{D}.$$

Положим здесь $z = z^0$ и используем условие согласования $\lambda(h^2+\delta^2) \to 0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$. Тогда получаем $\|z^\eta[\lambda]\|^2 \le \|z^0\|^2 + \psi(\eta,\lambda)$, $\psi(\eta,\lambda) \to 0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$. Так как одновременно мы имеем соотношение (1.9), а семейство $z^\eta[\lambda]$ по условию равномерно ограничено, то можем утверждать, что $z^\eta[\lambda] \to z^0$, $\eta \to 0$, $\lambda \to \infty$. $\square$

**1.2. Выбор параметра регуляризации при фиксированном конечном уровне погрешности в форме обобщенного принципа невязки и его связь с двойственностью.** С самого начала развития теории тихоновской регуляризации одной из основных является проблема выбора параметра регуляризации $\alpha = \alpha(\eta) > 0$ при фиксированном конечном уровне погрешности $\eta \equiv (h,\delta) > 0$, т. е. в ситуации, которая является характерной для всех практических некорректных задач [3,6,7]. Решение этой проблемы было предложено в форме так называемого обобщенного принципа невязки (подробности в [6, 7]). Этот принцип представляет собой строгое правило выбора параметра регуляризации $\alpha$, соответствующего данному фиксированному конечному уровню погрешности $\eta > 0$, т. е. $\alpha = \alpha^*(\eta)$, при котором имеет место предельное соотношение $\|z^{\eta,\alpha^*(\eta)} - z^0\| \to 0$, $\delta \to 0$. При этом величина $\alpha^*(\eta) > 0$ является корнем (при некоторых достаточно общих условиях единственным) нелинейного так называемого уравнения обобщенной невязки (подробности в [6, 7]). Оказывается, что связанные с двойственностью результаты и, в частности, формула дифференцирования маргинальной функции леммы 1.1 играют при этом самую существенную роль [9]. Покажем это, рассмотрев два существенно различных в данной ситуации, с точки зрения применения связанных с двойственностью и ПМЛ результатов, случая. Итак, как и выше, имеем точную задачу поиска нормального (минимального по норме) решения уравнения первого рода ($IP^0$), в которой будем считать, что $\mathcal{D} \subseteq Z$ — выпуклое замкнутое множество, содержащее нулевой элемент пространства $Z$. Пусть $z^0 \in \mathcal{D}$ — точное нормальное решение этого уравнения, причем $z^0 \neq 0$. Решение этого уравнения, как уже отмечалось выше, эквивалентно решению задачи минимизации с одним ограничением типа неравенства ($CE1$) с $A = A^0$, $u = u^0$, причем формально двойственной к последней является задача (1.7).

**1.2.1. Выбор параметра регуляризации при точно заданном операторе и фиксированном конечном уровне погрешности правой части уравнения, регуляризирующее свойство условия Слейтера.** Пусть вместо уравнения ($IP^0$) имеем возмущенное уравнение

$$A^0 z = u^\delta, \quad z \in \mathcal{D}, \quad u^\delta \in U, \quad \|u^\delta - u^0\| \le \delta. \tag{1.12}$$

Введем величину $\mu_\delta \equiv \inf\limits_{z\in\mathcal{D}} \|A^0 z - u^\delta\|$ — «меру несовместности» уравнения (1.12). Очевидно, $\mu_\delta \to 0$, $\delta \to 0$. Формально решение уравнения (1.12) эквивалентно решению задачи минимизации с одним ограничением типа неравенства

$$\|z\|^2 \to \min, \quad \|A^0 z - u^\delta\|^2 \le 0, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{1.13}$$

так как задача поиска нормального решения уравнения (1.12) и задача (1.13) одновременно либо разрешимы и их решения совпадают, либо они одновременно не имеют решения. В свою очередь, формально двойственной к задаче (1.13) является задача

$$V^\delta(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}}\{\|z\|^2 + \lambda\|A^0 z - u^\delta\|^2\} \to \sup, \quad \lambda \ge 0. \tag{1.14}$$

Тогда естественно, наряду с (1.13), рассмотреть вспомогательную задачу минимизации

$$\|z\|^2 \to \min, \quad \|A^0 z - u^\delta\|^2 \le \delta^2 + \mu_\delta^2, \quad z \in \mathcal{D}. \tag{1.15}$$

Для пояснения этого обстоятельства обозначим решение задачи (1.15) через $z^\delta$. Оно существует, так как сильно выпуклый непрерывный функционал на выпуклом замкнутом множестве гильбертова пространства достигает минимума в единственной точке, и при этом выпуклое замкнутое множество допустимых (удовлетворяющих ограничению) элементов в этой задаче не пусто (оно заведомо содержит $z^0$). Стандартные рассуждения для подобных ситуаций позволяют утверждать, что $z^\delta \to z^0$, $\delta \to 0$. Главная особенность этой выпуклой задачи состоит в ее нормальности из-за «добавка» $\mu_\delta^2$, который обеспечивает здесь выполнение условия Слейтера. Действительно, если $\mu_\delta > 0$, то $\|A^0 z^0 - u^\delta\|^2 < \delta^2 + \mu_\delta^2$. Если же $\mu_\delta = 0$, то, в силу определения нижней грани, найдется такой элемент $\bar{z} \in \mathcal{D}$, для которого $\|A^0 \bar{z} - u^\delta\|^2 < \delta^2$. Таким образом, в этой ситуации естественно записать регулярную функцию Лагранжа

$$\tilde{L}^\delta(z,\lambda) \equiv L^\delta(z,\lambda) - \lambda(\delta^2 + \mu_\delta^2) = \|z\|^2 + \lambda(\|A^0 z - u^\delta\|^2 - \delta^2 - \mu_\delta^2), \quad z \in \mathcal{D},$$

$$L^\delta(z,\lambda) \equiv \|z\|^2 + \lambda\|A^0 z - u^\delta\|^2, \quad z^\delta[\lambda] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} \tilde{L}^\delta(z,\lambda) = \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L^\delta(z,\lambda),$$

и двойственную задачу

$$\tilde{V}^\delta(\lambda) \equiv V^\delta(\lambda) - \lambda(\delta^2 + \mu_\delta^2) = \min_{z\in\mathcal{D}} L^\delta(z,\lambda) - \lambda(\delta^2 + \mu_\delta^2) \to \max, \quad \lambda \ge 0, \tag{1.16}$$

множество решений $\lambda^*(\delta)$ которой, в соответствии с теоремой Куна–Таккера (см., например, [5, гл. 3, § 5, теорема 1]), непусто, ограничено (так как задача нормальна), причем каждое из таких решений в паре с $z^\delta$ составляет седловую точку функции Лагранжа $\tilde{L}^\delta$. Эти решения могут быть найдены путем поиска корней уравнения $(\tilde{V}^\delta)'(\lambda) = 0$, $\lambda \ge 0$, так как функция $\tilde{V}^\delta$ дифференцируема, из-за того, что функция Лагранжа $\tilde{L}^\delta(z,\lambda)$, $z \in \mathcal{D}$ достигает минимума в единственной точке, и в силу леммы 1.1 ее градиент равен

$$(\tilde{V}^\delta)'(\lambda) = \|A^0 z^\delta[\lambda] - u^\delta\|^2 - \delta^2 - \mu_\delta^2 = (V^\delta)'(\lambda) - \delta^2 - \mu_\delta^2.$$

При этом $(\tilde{V}^\delta)'(\lambda^*(\delta)) = 0$, $V^{\delta\prime}(\lambda^*(\delta)) = \delta^2 + \mu_\delta^2$, $z^\delta[\lambda^*(\delta)] = z^\delta$. Одновременно можно утверждать, что $\lambda^*(\delta) \to +\infty$, $\delta \to 0$ (какое бы решение $\lambda^*(\delta)$ мы ни выбирали), так как элемент $z^\delta[\lambda^*(\delta)]$ доставляет минимальное значение функции Лагранжа $L^\delta(z,\lambda^*(\delta))$, $z \in \mathcal{D}$, т. е. имеет место вариационное неравенство

$$\langle z^\delta[\lambda^*(\delta)] + \lambda^*(\delta)(A^{0*}A^0 z^\delta[\lambda^*(\delta)] - A^{0*}u^\delta), z - z^\delta[\lambda^*(\delta)]\rangle \ge 0 \quad \forall\, z \in \mathcal{D}$$

и $z^\delta \to z^0$, $u^\delta \to u^0$, $\delta \to 0$, но $z^0 \ne 0$ и $\mathcal{D}$ содержит нулевой элемент.

Итак, для приближенного решения исходной задачи ($IP^0$) можно решать задачу минимизации

$$\tilde{L}^\delta(z,\lambda) = \|z\|^2 + \lambda(\|A^0 z - u^\delta\|^2 - \delta^2 - \mu_\delta^2) \to \min, \quad z \in \mathcal{D}$$

или, что одно и то же, задачу

$$L^\delta(z,\lambda) = \|z\|^2 + \lambda\|A^0 z - u^\delta\|^2 \to \min, \quad z \in \mathcal{D},$$

или, что одно и то же, задачу минимизации функционала Тихонова ($\alpha = 1/\lambda$ — параметр регуляризации в методе регуляризации Тихонова)

$$M^{\delta,\alpha}(z) \equiv \alpha\|z\|^2 + \|A^0 z - u^\delta\|^2 \to \min, \quad z \in \mathcal{D},$$

а $\alpha$ подбирать из решения уравнения

$$\|A^0 z^{\delta,\alpha} - u^\delta\|^2 - \delta^2 - \mu_\delta^2 = 0, \quad \alpha \ge 0, \quad z^{\delta,\alpha} \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} M^{\delta,\alpha}(z) = \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} \{\alpha\|z\|^2 + \|A^0 z - u^\delta\|^2\},$$

т. е. в соответствии с обобщенным принципом невязки [6, 7] в случае точного задания оператора $A$ (связанные с обобщенным принципом невязки подробности см. в [6, §§ 2,3]).

Мы получили хорошо известный в теории регуляризации [6, 7] обобщенный принцип невязки, который представляет собой, по сути дела, способ приближенного решения исходного операторного уравнения ($IP^0$) путем решения соответствующей двойственной одномерной задачи (1.14) без ее регуляризации, а именно, путем максимизации целевой функции в одномерной задаче выпуклого программирования (см. (1.16) $V^\delta(\lambda) \to \max,\ \lambda \geq 0$, до того уровня, при котором монотонно убывающая производная $(V^\delta)'(\lambda),\ \lambda \geq 0$ принимает значение $\delta^2 + \mu_\delta^2$ (можно показать [6, §§ 2,3], что $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}(V^\delta)'(\lambda) = \mu_\delta^2$) или, что то же самое, путем максимизации целевой функции в одномерной задаче выпуклого программирования $\tilde{V}^\delta(\lambda) \to \max,\ \lambda \geq 0$, до того уровня, при котором монотонно убывающая производная $(\tilde{V}^\delta)'(\lambda),\ \lambda \geq 0$ принимает нулевое значение, т. е. до точки максимума функции $\tilde{V}^\delta(\lambda),\ \lambda \geq 0$. Одновременно выше мы передоказали хорошо известный результат [6, §§ 2,3], состоящий в том, что решение задачи минимизации (1.15), которое составляет суть классического для теории некорректных задач так называемого обобщенного метода невязки, эквивалентно обобщенному принципу невязки (см. подробности в [6, §§ 2,3]).

Важно подчеркнуть, что центральным существенным моментом в проведенных выше рассуждениях было использование факта разрешимости задачи выпуклого программирования (1.15) и выполнимости для нее условия Слейтера, что позволило установить разрешимость и двойственной для нее задачи на основе классической теоремы Куна–Таккера. Во всей этой процедуре существенно использовался факт точного задания оператора $A$.

**1.2.2. Выбор параметра регуляризации при фиксированном конечном уровне погрешности оператора и правой части уравнения.** Если же в рассмотренной выше ситуации считать, что и оператор задается с ошибкой, т. е. вместо точного уравнения ($IP^0$) мы имеем его приближение ($IP^\eta$) с линейным ограниченным оператором $A^h\colon Z \to U$, то в этом случае роль задачи минимизации (1.15) для случая $h = 0$ будет играть уже невыпуклая задача минимизации с нелинейным ограничением типа неравенства

$$\|z\|^2 \to \min, \quad \|A^h z - u^\delta\|^2 \leq (\delta + h\|z\|)^2 + \mu_{h,\delta}^2, \quad z \in \mathcal{D}, \tag{1.17}$$

где $\mu_{h,\delta}$ — опять же «мера несовместности», но уже уравнения с возмущенным оператором: $\mu_{h,\delta} \equiv \inf\limits_{z\in\mathcal{D}} \|A^h z - u^\delta\|$. Эта задача, так же, как и задача (1.15), разрешима и удовлетворяет условию Слейтера, но установить разрешимость двойственной для нее задачи так, как это было сделано выше (при $h = 0$), уже нельзя из-за отсутствия «подходящего» для данной нелинейной ситуации аналога теоремы Куна–Таккера. Вместе с тем полный аналог доказанного выше результата в случае $h = 0$, в соответствии с которым для приближенного решения операторного уравнения надо до «нужного» уровня решать соответствующую двойственную задачу, сохраняет свою силу и в том случае, когда оператор $A$ задается с ошибкой, т. е. в случае уравнения ($IP^\eta$).

А именно, в этом случае оказывается, что для приближенного решения уравнения ($IP^0$) следует решать соответствующую двойственную одномерную задачу

$$V^\eta(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}}\{\|z\|^2 + \lambda\|A^h z - u^\delta\|^2\} \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L^\eta(z,\lambda) \to \max, \quad \lambda \geq 0, \tag{1.18}$$

$$z^\eta[\lambda] \equiv \operatorname*{argmin}_{z\in\mathcal{D}} L^\eta(z,\lambda), \quad \eta \equiv (h,\delta),$$

без ее регуляризации до того уровня, при котором монотонно убывающая производная $(V^\eta)'(\lambda)$, $\lambda \geq 0$ принимает значение $(\delta + h\|z^\eta[\lambda]\|)^2 + \mu_{h,\delta}^2$. Такая точка $\lambda > 0$ существует в предположении $\|u^\delta\|^2 > \delta^2 + \mu_{h,\delta}^2$, так как можно показать [6, §§ 2,3], что, во-первых,

$$\lim_{\lambda\to+0}(V^\eta)'(\lambda) = \lim_{\lambda\to+0}\|A^h z^\eta[\lambda] - u^\delta\|^2 = \|u^\delta\|^2, \quad \lim_{\lambda\to+\infty}(V^\eta)'(\lambda) = \lim_{\lambda\to+\infty}\|A^h z^\eta[\lambda] - u^\delta\|^2 = \mu_{h,\delta}^2$$

и непрерывная функция $(V^\eta)'(\lambda)$, $\lambda \geq 0$ монотонно не возрастает, и, во-вторых,

$$\lim_{\lambda\to+0}\|z^\eta[\lambda]\| = 0, \quad \liminf_{\lambda\to+\infty}\|z^\eta[\lambda]\| \geq 0$$

и непрерывная функция $\|z^\eta[\lambda]\|$, $\lambda \geq 0$ монотонно не убывает.

Итак, мы получили, что процесс решения задачи $(IP^\eta)$ в соответствии с обобщенным принципом невязки [6, §§ 2,3]), т. е. нахождением корня $\lambda^*$ нелинейного уравнения обобщенной невязки

$$\|A^h z^\eta[\lambda] - u^\delta\|^2 - (\delta + h\|z^\eta[\lambda]\|)^2 - \mu_{h,\delta}^2 = 0, \quad \lambda > 0,$$

также представляет собой процесс решения двойственной задачи (1.18), причем этот процесс максимизации следует вести до такой величины $\lambda^* > 0$, для которой величина $(V^\eta)'(\lambda^*) = \|A^h z^\eta[\lambda^*] - u^\delta\|^2$ оказывается равной $(\delta + h\|z^\eta[\lambda^*]\|)^2 + \mu_{h,\delta}^2$. При этом, как показано в [6, § 3]), элемент $z^\eta[\lambda^*]$ есть одновременно и решение нелинейной задачи (1.17).

Описанные выше два процесса приближенного решения операторного уравнения $(IP)$ на основе решения двойственных задач (1.16) и (1.18) соответственно при $h = 0$ и $h \neq 0$ существенно разнятся своими обоснованиями. В первом случае $(h = 0)$ мы существенно использовали тот факт, что к задаче выпуклого программирования (1.15) может быть применена теорема Куна–Таккера. Во втором же случае $(h \neq 0)$ для соответствующего аналога задачи (1.15), а именно, задачи (1.17), ввиду нелинейности последней, применение теоремы Куна–Таккера оказалось невозможным. Такая разница в обоснованиях этих двух аналогичных процессов объясняется тем, что в соответствии с идеологией тихоновской регуляризации [6, §§ 2,3] уравнение $A^h z = u^\delta$ при обосновании того или иного варианта регуляризации «заменяется» равенством нулю невязки $\|A^h z - u^\delta\| = 0$, т. е. скалярным уравнением. С одной стороны, такая замена позволяет работать с одномерными двойственными задачами и обеспечивает равенство параметра регуляризации величине, являющейся обратной по отношению к одномерной двойственной переменной. С другой же стороны, при указанной замене мы неизбежно сталкиваемся с описанным выше эффектом, когда «внутреннее устройство» процедуры регуляризации зависит от характера возмущения регуляризируемого уравнения.

Подытоживая сказанное выше в данном разделе, можно утверждать, что метод регуляризации Тихонова естественно трактовать как метод, регуляризирующее действие которого есть результат совместного применения метода двойственности и ПМЛ в задаче $(CE1)$, эквивалентной исходной задаче решения операторного уравнения. Сформулируем его важные на наш взгляд характеристические особенности.

1. Теореме сходимости метода регуляризации Тихонова может быть придан вид выражаемого в терминах предельных соотношений утверждения в форме двойственности относительно задачи $(CE1)$.

2. В рамках метода регуляризации исходное вообще говоря «бесконечномерное равенство» $Az = u$ подменяется своим одномерным «обедненным аналогом» $\|Az - u\| = 0$.

3. Параметр регуляризации $\alpha$ в методе регуляризации Тихонова и двойственная переменная в задаче минимизации ( $CE1$ ) (см. также задачу (1.1)) являются одномерными взаимнообратными величинами.

4. В рамках метода регуляризации имеется существенная разница в обосновании обобщенного принципа невязки в случаях точно и неточно заданного оператора $A$. При возмущении оператора $A$, из-за замены «бесконечномерного» равенства $Az = u$ одномерным равенством невязки $\|Az - u\|$ нулю, возникает нелинейная задача (1.17) и, как следствие, происходит выход за «пределы» теории выпуклых задач при решении линейного уравнения $Az = u$.

## 2. Метод стабилизации Тихонова для выпуклой задачи общего вида, его приложение к решению задач на условный экстремум

**2.1. Метод стабилизации Тихонова.** Конструкция функционала Тихонова (0.1) наводит на мысль, что при решении некорректной задачи ( $IP$ ) приближение к ее точному решению происходит за счет решения «эквивалентной» задачи минимизации функционала квадрата невязки $\|A^h z - u^\delta\|^2$, $z \in \mathcal{D}$, свойства устойчивости которой «корректируются» за счет стабилизатора $\|\cdot\|^2$ с параметром регуляризации $\alpha$. Такая конструкция подсказывает, как может быть организовано устойчивое решение и выпуклой задачи минимизации общего вида (без ограничений типа равенства и неравенства)

$$f^0(z) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D} \subseteq Z, \tag{2.1}$$

в которой множество $\mathcal{D}$ считаем выпуклым и замкнутым множеством гильбертова пространства $Z$, функцию $f^0 : \mathcal{D} \to \mathbb{R}^1$ — непрерывной и выпуклой на $\mathcal{D}$. Метод стабилизации (регуляризации) Тихонова для устойчивого решения задач минимизации общего вида (2.1) был предложен в свое время в работе [13], а затем развит в большом числе различных публикаций (см., например, [3, 8, 9]). Приведем теорему сходимости метода стабилизации Тихонова для выпуклой задачи общего вида (2.1), учитывая важность следующего классического характеристического свойства задач на условный экстремум:

**Свойство ( $CDP$ ).** Задачи, двойственные по отношению к задачам на условный экстремум (с ограничениями типа равенства и неравенства), являются с точностью до знака их целевой функции задачами выпуклыми.

С этой целью предположим, что задача (2.1) имеет решение, т. е. множество $\mathcal{D}^* \equiv \{z \in \mathcal{D} : f^0(z) = \inf_{y \in \mathcal{D}} f^0(y)\}$ непусто, и обозначим через $z^0$ нормальное, т. е. минимальное по норме, решение этой задачи. Пусть вместо точной функции $f^0$ в задаче (2.1) нам известно ее приближение $f^\delta$, $\delta \in [0, \delta_0]$, $\delta_0 > 0$ — некоторое число, причем $|f^\delta(z) - f^0(z)| \leq \delta(1 + \|z\|^2)$ $\forall\, z \in \mathcal{D}$. Основной конструкцией метода стабилизации Тихонова для решения задачи (2.1) является сглаживающая функция (функция Тихонова)

$$T^\delta_\alpha(z) \equiv f^\delta(z) + \alpha\|z\|^2, \quad z \in \mathcal{D},$$

где $\alpha > 0$ — параметр регуляризации. Слагаемое $\alpha\|z\|^2$, как и выше, носит название стабилизирующего слагаемого. Рассмотрим вспомогательную задачу минимизации

$$T^\delta_\alpha(z) \to \inf, \quad z \in \mathcal{D} \tag{2.2}$$

и предположим, что в нашем распоряжении имеется точка $z^{\delta,\epsilon}_\alpha$ такая, что

$$T^\delta_\alpha \equiv \min_{z \in \mathcal{D}} T^\delta_\alpha(z) \leq T^\delta_\alpha(z^{\delta,\epsilon}_\alpha) \leq T^\delta_\alpha + \epsilon,$$

где величина $\epsilon > 0$ характеризует точность приближенного решения задачи минимизации (2.2). Условие согласованного стремления к нулю указанных величин $\delta$, $\epsilon$, $\alpha$ и одновременно обоснование метода стабилизации дается в следующей теореме (см., например, [8, гл. 9, § 4, теорема 2], [9, теорема 3.2.1]).

**Теорема 2.1.** [***Сходимость метода стабилизации Тихонова в выпуклой задаче минимизации общего вида***] *Пусть выполняется условие согласования* $(\epsilon+\delta)/\alpha \to 0$, $\epsilon \to 0$, $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$. *Тогда справедливо предельное соотношение* $z_\alpha^{\delta,\epsilon} \to z^0$, $\epsilon \to 0$, $\delta \to 0$, $\alpha \to 0$.

**2.2. Метод стабилизации Тихонова в задачах на условный экстремум.** Стабилизация (регуляризация) по Тихонову для выпуклых задач общего вида (2.1), а также для аналогичных задач, но с невыпуклыми $f^0$ и $\mathcal{D}$ широко применялась для приближенного решения задач на условный экстремум [8, гл. 9, § 5], т. е. задач, принадлежащих важному типичному классу некорректных задач. В [8, гл. 9] можно найти и обширную библиографию по этому вопросу.

Отметим важные специфические особенности такого подхода к устойчивому решению задач на условный экстремум. К ним, в первую очередь, относятся:

1. Необходимость преобразования исходной экстремальной задачи с ограничениями типа равенства и неравенства в задачу оптимизации общего вида (выпуклую или нелинейную задачу вида (2.1) без равенств и неравенств) со своим множеством допустимых элементов $\mathcal{D}$, которое конструируется так или иначе в силу имеющихся в исходной задаче на условный экстремум ограничений. В этой связи можно указать, например, на используемые для решения задач с ограничениями типа равенства и неравенства методы регуляризации неустойчивых задач как первого ([8, гл. 9, § 2]), так и второго (метод стабилизации [8, гл. 9, § 4], метод невязки [8, гл. 9, § 5], метод квазирешений [8, гл. 9, § 6], методы регуляризации с расширением множеств [8, гл. 9, § 7], регуляризованный метод проекции градиента [8, гл. 9, § 8], регуляризованный метод условного градиента [8, гл. 9, § 8]), типа.

2. Необходимость проверки выполнимости в задаче на условный экстремум ряда условий. Среди них можно выделить так называемое условие сильной согласованности постановки задачи условной оптимизации (см., например, задачу (1), (2) и неравенство (9) в [8, гл. 9, § 4], а также [8, определение 5.16.3]) как, по-видимому, наиболее сложное с точки зрения его проверки. Достаточным условием его выполнимости является условие существования седловой точки функции Лагранжа задачи (см. также [8, лемма 5.16.5]).

Отмеченные трудности, связанные с применением метода стабилизации для выпуклых задач общего вида к решению задач на условный экстремум, могут быть в существенной степени преодолены, если мы вспомним указанное выше свойство ($CDP$). Благодаря свойству ($CDP$) теоремы «типа» сформулированной выше теоремы 2.1 позволяют в случае задачи условной минимизации применить стабилизацию по Тихонову для устойчивого построения максимизирующей последовательности в двойственной задаче, которую естественно трактовать в данной ситуации как вогнутую задачу общего вида. Как следствие, это приводит к устойчивому решению исходной (прямой) задачи условной минимизации. В этом заключается подход к регуляризации задач на условный экстремум на основе так называемой двойственной регуляризации [12, 14, 15]. Существенное отличие при этом от ситуации теоремы 2.1 состоит в том, что двойственные задачи к задачам на условный экстремум могут и не иметь решений.

## 3. Метод стабилизации Тихонова и регуляризация ПМЛ в задачах на условный экстремум

**3.1. Регуляризация ПМЛ в задаче решения линейного операторного уравнения, предварительные соображения общего характера.** Вернемся к задаче решения операторного уравнения ($IP$). Подход к регуляризации в задачах на условный экстремум, основанный на регуляризации двойственной задачи [12], был предложен в работах [14,15], соответствующие содержательные комментарии и подробности можно найти в [16,17]. В указанных работах было показано, что ПМЛ как нельзя лучше подходит для решения многих некорректных задач на условный экстремум и, в частности, задач отыскания (нормальных) решений абстрактных операторных уравнений первого рода вида ($IP$). Однако, прежде всего, само это правило должно быть регуляризовано. Главная роль в такой регуляризации принадлежит конструкции классической функции Лагранжа. При этом важным является то, что для задач на условный экстремум выполняется, как уже было отмечено выше, характеристическое свойство ($CDP$), обеспечивающее возможность стабилизации по Тихонову соответствующих двойственных задач, которые в этом случае следует трактовать как выпуклые задачи (с точностью до знака их целевых функций) общего вида (2.1). Помимо того, здесь следует также отметить появляющуюся, благодаря основанной на двойственности регуляризации, естественную возможность применять для исследования некорректных задач на условный экстремум развитый в последние десятилетия аппарат метода возмущений, в основе которого, в свою очередь, лежат полученные также в последние десятилетия результаты выпуклого и нелинейного (для невыпуклых задач на условный экстремум) анализа.

Будем теперь использовать для его решения задачу ($CE2$) вместо задачи ($CE1$) и опираться при этом на метод двойственной регуляризации (в той или иной версии), использующий характеристическое свойство ($CDP$) задач на условный экстремум. Такой подход к решению операторного уравнения ($IP$) с опорой на задачу ($CE2$) был реализован в работе [11]. При этом, основанном на двойственности, подходе для широкого класса задач на условный экстремум происходит регуляризация ПМЛ и оно трансформируется в необходимые и достаточные условия устойчивого построения минимизирующих последовательностей в задачах условной минимизации. Непосредственно регуляризирующее действие при таком подходе, влекущее устойчивое построение минимизирующих последовательностей, обеспечивается за счет стабилизации по Тихонову двойственной задачи по отношению к исходной задаче ($CE2$), которая, благодаря свойству ($CDP$), является задачей вогнутой оптимизации общего вида. Отметим, что в случае разрешимости последней к ней может быть применена теорема типа теоремы 2.1.

Отметим следующие характерные особенности такого основанного на регуляризации двойственной задачи подхода к устойчивому решению задачи ($CE2$), эквивалентной операторному уравнению ($IP$):

1. Весь процесс регуляризации подразумевает работу с исходным «бесконечномерным равенством» $Az = u$.

2. Параметр $\alpha$ в регуляризации по Тихонову двойственной задачи есть обычная положительная числовая величина. В то же время, двойственная переменная $\lambda$ в этом случае принадлежит пространству $U$.

3. Процесс регуляризации ПМЛ устроен совершенно одинаково как в случае точного, так и неточного задания оператора $A$. Другими словами, в случае неточного задания

оператора конструкции указанной регуляризации не выводят нас из класса конструкций для выпуклых задач.

Проиллюстрируем сказанное на примере полученных в [11] результатов по регуляризации ПМЛ для задачи ( $CE2$ ), эквивалентной исходному операторному уравнению ( $IP$ ), сопровождая используемые ниже конструкции и формулируемые утверждения соответствующими комментариями, характеризующими отличия использования задачи ( $CE2$ ) вместо задачи ( $CE1$ ) для устойчивого решения указанного уравнения. Считаем для упрощения изложения, что в оценках для отклонения возмущенных оператора и правой части уравнения от точных используется один и тот же параметр $\delta$, т. е. $h=\delta$.

**3.2. Постановка «простейшей» задачи выпуклого программирования, необходимые вспомогательные леммы.** Рассматриваем задачу

$$(P_p^\delta) \qquad \|z\|^2\to\inf,\quad A^\delta z=u^\delta+p,\quad z\in\mathcal{D}\subseteq Z,$$

где $A^\delta : Z\to U$ — линейный ограниченный оператор, $u^\delta\in U$ — заданный элемент, $\delta_0>0$ — некоторое фиксированное число, $\mathcal{D}$ — выпуклое замкнутое множество, $Z,U$ — гильбертовы пространства. Верхний индекс $\delta$ в исходных данных задачи ( $P_p^\delta$ ) означает, что эти данные являются точными ( $\delta=0$ ) или возмущенными ( $\delta>0$ ), т. е. задаются с определяемой оценками

$$\|(A^\delta-A^0)z\|\le C\delta(1+\|z\|)\quad \forall\, z\in Z,\quad \|u^\delta-u^0\|\le C\delta, \tag{3.1}$$

где $C>0$ не зависит от $\delta$, ошибкой, величину которой и характеризует число $\delta\in[0,\delta_0]$. Соответственно, задачу ( $P_p^0$ ) называем точной, задачу ( $P_p^\delta$ ) при $\delta>0$ — возмущенной. Как и ранее, обозначим единственное решение задачи ( $P_p^0$ ), в случае его существования, через $z_p^0$.

В отличие от задач ( $CE1$ ), (1.1) задача ( $P_p^0$ ) зависит от параметра $p\in U$, т. е. в данном случае мы имеем дело не с одной (индивидуальной) задачей, а с целым семейством задач, куда наша исходная задача формально включена при $p=0$. Это означает, что мы находимся в рамках применения метода возмущений (см., например, [18, п. 3.3.2]), использование которого оказывается здесь возможным именно благодаря замене задачи ( $CE1$ ) на задачу ( $CE2$ ).

Обозначим: $\mathcal{D}_p^{\delta,\epsilon}\equiv\{z\in\mathcal{D}:\ \|A^\delta z-u^\delta-p\|\le\epsilon\}$, $\epsilon\ge 0$, $\mathcal{D}_p^{0,\epsilon}\equiv\mathcal{D}_p^\epsilon$. Определим классическую функцию значений задачи ( $P_p^0$ ) формулой $\beta_0(p)=\inf\limits_{z\in\mathcal{D}_p^0}\|z\|^2\quad\forall\, p\in U$. Определим также обобщенную функцию значений $\beta : U\to\mathbb{R}^1\cup\{+\infty\}$ посредством соотношений $\beta(p)\equiv\beta_{+0}(p)\equiv\lim\limits_{\epsilon\to+0}\beta_\epsilon(p)$, $\beta_\epsilon(p)\equiv\inf\limits_{z\in\mathcal{D}_p^\epsilon}\|z\|^2$, $\beta_\epsilon(p)\equiv+\infty$, если $\mathcal{D}_p^\epsilon=\emptyset$. Так как $\|\cdot\|^2$ — сильно выпуклый функционал, то справедлива (см. леммы 1.1, 1.2, 1.3 в [19])

**Лемма 3.1.** *Функции значений* $\beta_0,\ \beta : U\to\mathbb{R}^1\cup\{+\infty\}$ *совпадают, являясь полунепрерывными снизу и выпуклыми. При этом* $\beta(p)=\{\|z_p^0\|^2$, *если* $z_p^0$ *существует;* $+\infty$ *в ином случае*$\}$ $\forall p\in U$.

Справедливо также следующее важное, в контексте настоящей статьи, утверждение о плотности субдифференцируемости (см., например, [20, теорема 4.3]).

**Лемма 3.2.** *Субдифференциал собственной выпуклой полунепрерывной снизу функции* $f : H\to\mathbb{R}^1\cup\{+\infty\}$, *где* $H$ *— гильбертово пространство, не пуст в точках плотного в* $\operatorname{dom} f$ *множества.*

Утверждения сформулированных выше лемм 3.1 и 3.2 представляют собой базовые для применения метода возмущений результаты. Утверждаемые в них такие свойства параметрической задачи ( $P_p^0$ ) в целом как полунепрерывность снизу функции значений $\beta$ и плотная субдифференцируемость этой функции в совокупности позволяют в ряде случаев устанавливать и «нужные» свойства отдельных (индивидуальных) задач, например, задачи $(P_0^0)$. Именно в этом и состоит смысл применения метода возмущений.

**3.3. Обобщенная минимизирующая последовательность.** Центральную роль при рассмотрении задач ( $P_p^0$ ) будет играть понятие обобщенной минимизирующей последовательности (ОМП) — минимизирующего приближенного решения в смысле Дж. Варги [21]. Напомним его.

О п р е д е л е н и е 3.1. ОМП в задаче ( $P_p^0$ ) называется последовательность элементов $z^k \in \mathcal{D}$, $k = 1, 2, \ldots,$ такая, что выполняются соотношения $\|z^k\|^2 \to \beta(p)$, $z^k \in \mathcal{D}_p^{\epsilon^k}$, $k \to \infty$, для некоторой сходящейся к нулю последовательности $\epsilon^k$, $k = 1, 2, \ldots,$ неотрицательных чисел.

Основной целью далее для нас, как и в [11], будет устойчивое построение ОМП в задаче ( $P_p^0$ ). Отметим сразу, что конструируемая в рамках метода регуляризации Тихонова в предыдущем разделе последовательность $z^{\eta^k, \alpha(\eta^k)} = z^{\eta^k}[1/\alpha(\eta^k)]$, $k = 1, 2, \ldots,$ $\eta^k \to 0$, $k \to \infty$ (см. теоремы 0.1, 1.1) есть ничто иное, как ОМП в задаче ( $CE1$ ) при $A = A^0$, $u = u^0$.

В силу дифференцируемости по Фреше функционала $\|\cdot\|^2$ справедлива следующая лемма, доказательство которой проходит по стандартной схеме, основанной на слабой компактности ограниченного замкнутого выпуклого множества и слабой полунепрерывности снизу непрерывного выпуклого функционала в гильбертовом пространстве.

**Лемма 3.3.** *Пусть $\beta(p) < +\infty$. Тогда для любой ОМП $z^k$, $k = 1, 2, \ldots,$ в разрешимой единственным образом в этом случае задаче $(P_p^0)$ справедливо предельное соотношение $z^k \to z_p^0$, $k \to \infty$.*

**3.4. Понятие ОМП-образующего оператора.** Определим далее ориентированное на задачи условной оптимизации понятие регуляризирующего оператора [22].

О п р е д е л е н и е 3.2. Зависящий от параметра $\delta \in (0, \delta_0)$ оператор $R(\cdot, \cdot, \delta)$, ставящий в соответствие каждой паре исходных данных $A^\delta, u^\delta$, удовлетворяющих оценкам (3.1), элемент $R(A^\delta, u^\delta, \delta) \equiv z^\delta \in \mathcal{D}$ такой, что $\|z^\delta\|^2 \to \beta(p)$, $\|A^0 z^\delta - u^0 - p\| \to 0$, $\delta \to 0$, называется регуляризирующим в задаче $(P_p^0)$.

Так как основной нашей целью является построение ОМП в задаче ( $P_p^0$ ), а семейство $\{z^\delta \in \mathcal{D} : \delta \in (0, \delta_0]\}$ из определения 3.2 не является последовательностью, то помимо введенного выше определения регуляризирующего оператора в задаче ( $P_p^0$ ) введем его «след» — определение ОМП-образующего оператора в задаче ( $P_p^0$ ).

О п р е д е л е н и е 3.3. Пусть $\delta^k \in (0, \delta_0)$, $k = 1, 2, \ldots,$ — сходящаяся к нулю последовательность положительных чисел. Зависящий от $\delta^k$, $k = 1, 2, \ldots,$ оператор $R(\cdot, \cdot, \delta^k)$, ставящий в соответствие каждому набору исходных данных $(A^{\delta^k}, u^{\delta^k})$, удовлетворяющих оценкам (3.1) при $\delta = \delta^k$, элемент $z^{\delta^k} \in \mathcal{D}$, называется ОМП-образующим в задаче $(P_p^0)$, если последовательность $z^{\delta^k}$, $k = 1, 2, \ldots,$ есть ОМП в этой задаче.

Итак, мы имеем два определения регуляризирующего алгоритма. Первое из них, т. е. определение 0.1, это классическое определение [2,3,6,7] для задачи решения операторного уравнения ( $IP^0$ ). Второе, т. е. определение 3.2, сформулировано применительно к задаче $(P^0_0)$. Как показано в [11], применительно к двум простейшим эквивалентным задачам ( $IP^0$ ) и ( $P^0_0$ ) эти определения можно считать эквивалентными. При этом в [11] отмечено, что при доказательстве теоремы сходимости метода регуляризации Тихонова (см. теоремы 0.1, 1.1), прежде всего, обеспечивается построение ОМП в задаче условной минимизации ( $P^0_0$ ), эквивалентной некорректной задаче ( $IP^0$ ). Та же идея построения ОМП лежит и в основе определения регуляризирующего алгоритма 3.2. Можно утверждать, что регуляризация ПМЛ обеспечивает такое построение при минимальных требованиях к исходным данным задач условной минимизации. Последнее объясняется тем, что такая важная трансформация привычного ПМЛ оказалась возможной благодаря применению в задаче условной оптимизации основанного на двойственности подхода к регуляризации. Опора на теорию двойственности в совокупности с идеей регуляризации двойственной задачи позволяет при построении ОМП обходиться минимумом условий на задачу. Автор придерживается точки зрения, в соответствии с которой задачи условной оптимизации занимают свое особое место в общей теории некорректных задач, и по этой причине для них естественно введение соответствующего специфического понятия регуляризирующего алгоритма.

**3.5. Функционал Лагранжа и его экстремали, двойственная задача и двойственная регуляризация.** Введем функционал Лагранжа $L^\delta_p(z,\lambda) \equiv \|z\|^2 + \langle \lambda, A^\delta z - u^\delta - p\rangle$, его экстремаль (минималь) $z^\delta[\lambda] \equiv \operatorname{argmin}\{L^\delta_p(z,\lambda),\, z \in \mathcal{D}\}$, двойственный функционал $V^\delta_p(\lambda) \equiv \min\limits_{z\in\mathcal{D}} L^\delta_p(z,\lambda)$, а также двойственную к ( $P^0_p$ ) задачу

$$V^0_p(\lambda) \equiv \min_{z\in\mathcal{D}} L^0_p(z,\lambda) \to \sup, \quad \lambda \in U,$$

которая является вогнутой задачей общего вида и может быть как разрешимой, так и неразрешимой.

Опишем далее метод двойственной регуляризации [12] устойчивого построения в задаче ( $P^0_p$ ) ОМП из экстремалей функционала Лагранжа и сформулируем соответствующую теорему сходимости для него, доказательство которой можно найти в [12,14]. Обозначим через $\lambda^{\delta,\alpha}_p$ единственную в $U$ точку, дающую максимум функционалу Тихонова $R^{\delta,\alpha}_p(\lambda) \equiv V^\delta_p(\lambda) - \alpha\|\lambda\|^2$, $\lambda \in U$. Справедлива следующая

**Теорема 3.1.** [ ***Сходимость метода двойственной регуляризации*** ] *Пусть задача* $(P^0_p)$ *разрешима. Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к* $(P^0_p)$ *задача, при условии согласования* $\delta/\alpha(\delta) \to 0$, $\alpha(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$ *выполняются предельные соотношения*

$$\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_p]\|^2 \to \|z^0_p\|^2,\ A^0 z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_p] - u^0 - p \to 0,\ \langle \lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_p, A^\delta z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_p] - u^\delta - p\rangle \to 0,\ \delta \to 0,$$

*и, как следствие (благодаря дифференцируемости по Фреше функционала* $\|\cdot\|^2$ *), предельное соотношение (см. лемму 3.3)*

$$\|z^\delta[\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}_p] - z^0_p\| \to 0, \quad \delta \to 0. \tag{3.2}$$

*Другими словами, вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная задача, алгоритм двойственной регуляризации является регуляризирующим в смысле определе-*

*ния 3.2 и, более того, справедливо предельное соотношение (3.2). Одновременно справедливо и предельное соотношение* $V_p^0(\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}) \to \sup\limits_{\lambda\in U} V_p^0(\lambda) = \|z_p^0\|^2, \quad \delta \to 0.$ *Если же двойственная к* $(P_p^0)$ *задача разрешима, то имеет место сходимость* $\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)} \to \lambda_p^0$ *при* $\delta \to 0,$ *где* $\lambda_p^0 \in U$ *есть ее нормальное решение.*

Замечание 3.1. Можно показать, что в качестве регуляризованной возмущенной двойственной задачи в методе двойственной регуляризации может быть взята задача $V_p^\delta(\lambda) - \alpha(\delta)\|\lambda - \widetilde{\lambda}\|^2 \to \sup,\ \ \lambda \in U,$ где $\widetilde{\lambda} \in U$ — произвольный фиксированный элемент. Тогда, в соответствии с классической теорией тихоновской стабилизации (см., например, [8, гл. 9, § 4]), в этом случае в качестве предельной точки $\lambda_p^0$ предельного соотношения $\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)} \to \lambda_p^0$ при $\delta \to 0$ выступает элемент, доставляющий минимальное значение функционалу $\|\lambda - \widetilde{\lambda}\|^2,\ \lambda \in U,$ среди всех решений двойственной к $(P_p^0)$ задачи. При этом все полученные выше результаты, связанные с процедурой двойственной регуляризации, сохраняют силу.

Как следствие применяемого метода возмущений и в отличие от теорем 0.1, 1.1 сходимости метода регуляризации Тихонова, в теореме 3.1 свойства сходимости метода двойственной регуляризации зависят от параметра $p$. Если задача двойственная к $(P_p^0)$ разрешима, т. е. $\partial\beta(p) \neq \emptyset,$ то вырабатываемая методом последовательность двойственной переменной сходится к ее минимальному по норме решению. В противном случае нормы элементов этой последовательности неограниченно возрастают. Заметим, наконец, что для практического нахождения точки $\lambda^{\delta,\alpha(\delta)}$ можно опираться на формулу [9, лемма 1.5.34], [12, леммы 3, 4] для градиента целевой функции $V_p^\delta(\lambda),\ \ \lambda \in U,$ двойственной задачи, приводимую в следующей лемме.

**Лемма 3.4.** *Производная Фреше функционала* $V_p^\delta : U \to \mathbb{R}^1$ *задается формулой* $\partial V_p^\delta(\lambda) = A^\delta z^\delta[\lambda] - u^\delta - p$ *и удовлетворяет условию Липшица.*

**3.6. Регуляризованное ПМЛ в «простейшей» задаче выпуклого программирования.** Сформулируем в данном разделе регуляризованное ПМЛ для задачи $(P_p^0)$. Его доказательство см. в [11]. Это регуляризованное ПМЛ можно также именовать регуляризованной теоремой Куна–Таккера (используемая функция Лагранжа регулярна) для задачи $(P_p^0)$, так как он имеет вид утверждения о необходимых и достаточных условиях существования ограниченной ОМП в задаче и о возможности аппроксимации решения $z_p^0$ точками минимума ее регулярной функции Лагранжа. Учитывая лемму 3.3, его можно трактовать одновременно как необходимое и достаточное условия обычной оптимальности в задаче $(P_p^0)$, выраженные, однако, в секвенциальной форме. Одновременно в формулируемой ниже теореме конструктивно предъявляется конкретная ОМП, аппроксимирующая решение $z_p^0$ и состоящая из указанных точек минимума регулярной функции Лагранжа.

**Теорема 3.2.** [***Регуляризованное ПМЛ***] *Пусть задана произвольная последовательность сходящихся к нулю положительных чисел* $\delta^k,\ \ k = 1, 2, \ldots .$ *Тогда вне зависимости от того, разрешима или нет, двойственная к* $(P_p^0)$ *задача, для существования ограниченной ОМП в задаче* $(P_p^0)$ *необходимо и достаточно, чтобы существовала последовательность* $\lambda^k \in U,\ \ k = 1, 2, \ldots,$ *такая, что выполняются соотношения*

$$\delta^k\|\lambda^k\|^2 \to 0, \quad z^{\delta^k}[\lambda^k] \in \mathcal{D}_p^{\delta^k,\epsilon^k}, \quad \epsilon^k \to 0, \quad \langle \lambda^k, A^{\delta^k} z^{\delta^k}[\lambda^k] - u^{\delta^k} - p\rangle \to 0, \quad k \to \infty,$$

*а последовательность* $z^{\delta^k}[\lambda^k],\ \ k=1,2,\dots$ *была ограничена. Эта последовательность* $z^{\delta^k}[\lambda^k],\ \ k=1,2,\dots,$ *является искомой ОМП в задаче* $(P_p^0)$.

*Другими словами, зависящий от* $\delta^k,\ \ k=1,2,\dots,$ *оператор* $R(\cdot,\cdot,\delta^k)$, *ставящий в соответствие каждому набору исходных данных* $(A^{\delta^k},u^{\delta^k})$, *удовлетворяющих оценкам* (3.1) *при* $\delta=\delta^k$, *элемент* $R(A^{\delta^k},u^{\delta^k},\delta^k)=z^{\delta^k}[\lambda^k]\in\mathcal{D}$, *является ОМП-образующим, причем в силу дифференцируемости по Фреше целевого функционала* $\|\cdot\|^2$ *имеет место и сильная сходимость* $z^{\delta^k}[\lambda^k]\to z_p^0,\ \ k\to\infty$. *Кроме того, выполняется предельное соотношение* $V_p^0(\lambda^k)\to\sup\limits_{\lambda\in U}V_p^0(\lambda)=\|z_p^0\|^2$.

*В случае существования ограниченной ОМП и разрешимости двойственной к* $(P_p^0)$ *задачи, т. е. в случае* $\partial\beta(p)\neq\varnothing$, *можно без ограничения общности считать, что* $\lambda^k\to\lambda_p^0,\ \ k\to\infty$, *где* $\lambda_p^0\in U$ *есть любое наперед выбранное и фиксированное решение указанной двойственной задачи* (*в частности, нормальное*).

*В качестве последовательности* $\lambda^k\in U,\ \ k=1,2,\dots,$ *может быть взята последовательность* $\lambda_p^{\delta^k,\alpha(\delta^k)},\ \ k=1,2,\dots,\ \ \delta^k/\alpha(\delta^k)\to 0,\ \ k\to\infty$, *генерируемая алгоритмом двойственной регуляризации теоремы 3.1 с учетом замечания 3.1, в соответствии с которым:* $\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}\equiv\operatorname{argmax}\{V_p^\delta(\lambda)-\alpha(\delta)\|\lambda-\widetilde{\lambda}\|^2,\lambda\in U\},\ \ \delta/\alpha(\delta)\to 0,\ \ \alpha(\delta)\to 0,\ \ \delta\to 0$, $\widetilde{\lambda}\in U$ *— произвольный фиксированный элемент. В случае разрешимости двойственной к* $(P_p^0)$ *задачи имеет место сходимость* $\lambda_p^{\delta,\alpha(\delta)}\to\lambda_p^0,\ \ \delta\to 0$, *где в качестве* $\lambda_p^0\in U$ *может быть взято ее любое наперед выбранное и фиксированное решение* (*такая сходимость достигается за счет произвола в выборе* $\widetilde{\lambda}\in U$).

Следствием применения метода возмущений является то, что все соотношения сформулированного регуляризованного ПМЛ, как и соотношения теоремы 3.1, содержат параметр $p$. Укажем важные характеристические особенности утверждений теоремы 3.2, которую естественно трактовать как ОМП-образующий (регуляризирующий) в задаче $(IP)$ алгоритм, выраженный в форме максимально близкой к классической форме условий оптимальности для эквивалентной задачи $(CE2)$.

1. Благодаря возможности использования аппарата выпуклого анализа в рамках метода возмущений можно утверждать, что в случае непустоты субдифференциала (в смысле выпуклого анализа) или, что эквивалентно, в случае разрешимости двойственной к $(P_p^0)$ задачи, вырабатываемая теоремой последовательность двойственной переменной сходится к нормальному решению этой двойственной задачи. Если же $\partial\beta(p)=\emptyset$, то нормы элементов этой последовательности неограниченно возрастают с увеличением их номеров.

2. Аппроксимация точного решения $z_p^0$ элементами $z^{\delta^k}[\lambda^k],\ \ k=1,2,\dots$ означает, что каждый такой элемент есть экстремаль (единственная) функции Лагранжа $L_p^{\delta^k}(z,\lambda^k)$, $z\in\mathcal{D}$ в то время как двойственная переменная $\lambda^k$ выбирается в точном соответствии с методом стабилизации Тихонова применительно к задаче максимизации $V_p^0(\lambda)\to\sup$, $\lambda\in U$, приближенное значение целевой функции которой равно $V_p^{\delta^k}(\lambda)$. Тем самым показывается, что классическая теория условий оптимальности объединенная со стабилизацией по Тихонову двойственной задачи естественным образом порождает ОМП-образующие алгоритмы, которые можно трактовать как новые устойчивые к ошибкам исходных данных алгоритмы, пригодные для решения многих актуальных задач современного естествознания.

3. Более того, как показано в [11], предельный переход при $k\to\infty$ в соотношениях теоремы 3.2 приводит к классическим условиям оптимальности для оптимальных элементов

$z_p^0$, которым они удовлетворяют в соответствии с параметрическим недифференциальным ПМЛ [11, предложение 1.2] для задачи ( $P_p^0$ ).

## References

[1] А. Н. Тихонов, "О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации", *Доклады АН СССР*, **151**:3 (1963), 501–504; англ. пер.:A. N. Tikhonov, "Solution of incorrectly formulated problems and the regularization method", *Sov. Math., Dokl.*, **4** (1963), 1035–1038.

[2] А. Н. Тихонов, "О регуляризации некорректно поставленных задач", *Доклады АН СССР*, **153**:1 (1963), 49–52; англ. пер.:A. N. Tikhonov, "Regularization of incorrectly posed problems", *Sov. Math., Dokl.*, **4** (1963), 1624–1627.

[3] А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин, *Методы решения некорректных задач*, Наука, М., 1974; англ. пер.:A. N. Tikhonov, V. Ya. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Winston; Halsted Press, Washington; New York, 1977.

[4] *Некорректные задачи естествознания*, ред. А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, Изд-во МГУ, М., 1987; англ. пер.: *Il-posed Problems in the Natural Science*, Advances in Science and Technology in the USSR Mathematics and Mechanics, eds. A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, Mir Publ., Moscow, 1989.

[5] В. К. Иванов, В. В. Васин, В. П. Танана, *Теория линейных некорректных задач и ее приложения*, Наука, М., 1978; англ. пер.:V. K. Ivanov, V. V. Vasin, V. P. Tanana, *Theory of Linear Ill-Posed Problems and its Applications.* V. 36, Inverse and Ill-Posed Problems, Walter de Gruyter, Utrecht, 2002.

[6] А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола, *Регуляризирующие алгоритмы и априорная информация*, Наука, М., 1983. [A. N. Tikhonov, A. V. Goncharskii, V. V. Stepanov, A. G. Yagola, *Regularizing Algorithms And Apriori Information*, Nauka Publ., Moscow, 1983 (In Russian)].

[7] А. Б. Бакушинский, А. В. Гончарский, *Некорректные задачи. Численные методы и приложения*, Изд-во Моск. ун-та, М., 1989. [A. B. Bakushinskii, A. V. Goncharskii, *Incorrect Tasks. Numerical Methods and Applications*, Publishing House Moscow University, Moscow, 1989 (In Russian)].

[8] Ф. П. Васильев, *Методы оптимизации: В 2-х кн.*, МЦНМО, М., 2011. [F. P. Vasil'ev, *Optimization Methods: in 2 books*, MCCME, Moscow, 2011 (In Russian)].

[9] М. И. Сумин, *Некорректные задачи и методы их решения. Материалы к лекциям для студентов старших курсов*, Изд-во Нижегородского госуниверситета, Нижний Новгород., 2009. [M. I. Sumin, *Incorrect Problems and Methods for Solving Them. Materials for Lectures for Students Senior Students*, Publishing House of Nizhny Novgorod State University, Nizhny Novgorod, 2009 (In Russian)].

[10] М. И. Сумин, "Принцип Лагранжа и его регуляризация как теоретическая основа устойчивого решения задач оптимального управления и обратных задач", *Вестник российских университетов. Математика*, **26**:134 (2021), 151–171. [M. I. Sumin, "Lagrange principle and its regularization as a theoretical basis of stable solving optimal control and inverse problems", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **26**:134 (2021), 151–171 (In Russian)].

[11] М. И. Сумин, "О некорректных задачах, экстремалях функционала Тихонова и регуляризованных принципах Лагранжа", *Вестник российских университетов. Математика*, **27**:137 (2022), 58–79. [M. I. Sumin, "On ill-posed problems, extremals of the Tikhonov functional and the regularized Lagrange principles", *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **27**:137 (2022), 58–79 (In Russian)].

[12] М. И. Сумин, "Регуляризация в линейно выпуклой задаче математического программирования на основе теории двойственности", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **47**:4 (2007), 602–625; англ. пер.:M. I. Sumin, "Duality-based regularization in a linear convex mathematical programming problem", *Comput. Math. Math. Phys.*, **47**:4 (2007), 579–600.

[13] А. Н. Тихонов, "Об устойчивости задачи оптимизации функционалов", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **6**:4 (1966), 631–634; англ. пер.:A. N. Tikhonov, "On the stability of the functional optimization problem", *U.S.S.R. Comput. Math. Math. Phys.*, **6**:4 (1966), 28–33.

[14] М. И. Сумин, "Регуляризованная параметрическая теорема Куна–Таккера в гильбертовом пространстве", *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **51**:9 (2011), 1594–1615; англ.

пер.:M. I. Sumin, “Regularized parametric Kuhn–Tucker theorem in a Hilbert space”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **51**:9 (2011), 1489–1509.

[15] М. И. Сумин, “Устойчивое секвенциальное выпуклое программирование в гильбертовом пространстве и его приложение к решению неустойчивых задач”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **54**:1 (2014), 25–49; англ. пер.:M. I. Sumin, “Stable sequential convex programming in a Hilbert space and its application for solving unstable problems”, *Comput. Math. Math. Phys.*, **54**:1 (2014), 22–44.

[16] М. И. Сумин, “Зачем нужна регуляризация принципа Лагранжа и принципа максимума Понтрягина и что она дает”, *Вестник Тамбовского университета. Серия Естественные и технические науки*, **23**:124 (2018), 757–772. [M. I. Sumin, “Why regularization of Lagrange principle and Pontryagin maximum principle is needed and what it gives”, *Vestnik Tambovskogo universiteta. Seriya: estestvennye i tekhnicheskie nauki = Tambov University Reports. Series: Natural and Technical Sciences*, **23**:124 (2018), 757–772 (In Russian)].

[17] М. И. Сумин, “Регуляризованные принцип Лагранжа и принцип максимума Понтрягина в оптимальном управлении и обратных задачах”, Тр. ИММ УрО РАН, **25**, 2019, 279–296. [M. I. Sumin, “Regularized Lagrange principle and Pontryagin maximum principle in optimal control and in inverse problems”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **25**, 2019, 279–296 (In Russian)].

[18] В. М. Алексеев, В. М. Тихомиров, С. В. Фомин, *Оптимальное управление*, Наука, М., 1979; англ. пер.:V. M. Alekseev, V. M. Tikhomirov, S. V. Fomin, *Optimal Control*, Plenum Press, New York, 1987.

[19] М. И. Сумин, “Недифференциальные теоремы Куна–Таккера в задачах на условный экстремум и субдифференциалы негладкого анализа”, *Вестник российских университетов. Математика*, **25**:131 (2020), 307–330. [M. I. Sumin, “Nondifferential Kuhn–Tucker theorems in constrained extremum problems via subdifferentials of nonsmooth analysis”, *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **25**:131 (2020), 307–330 (In Russian)].

[20] Ж.-П. Обен, *Нелинейный анализ и его экономические приложения*, Мир, М., 1988; франц. ориг.:J.-P. Aubin, *L’Analyse non Linéaire et ses Motivations Économiques*, Elsevier Masson, Paris–New York, 1984.

[21] Дж. Варга, *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями*, Наука, М., 1977; англ. ориг.:J. Warga, *Optimal Control of Differential and Functional Equations*, Academic Press, New York, 1972.

[22] М. И. Сумин, “О регуляризации классических условий оптимальности в выпуклых задачах оптимального управления”, Тр. ИММ УрО РАН, **26**, 2020, 252–269. [M. I. Sumin, “On regularization of the classical optimality conditions in convex optimal control problems”, Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN, **26**, 2020, 252–269 (In Russian)].

**Информация об авторе**

**Сумин Михаил Иосифович**, доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Тамбовский государственный университет им. Г. Р. Державина, г. Тамбов, Российская Федерация. E-mail: m.sumin@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-3700-6428

Поступила в редакцию 24.08.2023 г.
Поступила после рецензирования 14.11.2023 г.
Принята к публикации 23.11.2023 г.

**Information about the author**

**Mikhail I. Sumin**, Doctor of Physics and Mathematics, Chief Researcher, Derzhavin Tambov State University, Tambov, Russian Federation.
E-mail: m.sumin@mail.ru
**ORCID:** https://orcid.org/0000-0002-3700-6428

Received 24.08.2023
Reviewed 14.11.2023
Accepted for press 23.11.2023